Generalizirani linearni modeli

B. Basrak & H. Planinić

svibanj 2021.

1 Uvod

U mnogim znanstvenim istraživanjima, ali i u financijama odn. osiguranju, važno je utvrditi da li neka odabrana veličina (npr. duljina života) ovisi o drugim mjerenim veličinama (npr. spolu, potrošnji duhanskih proizvoda, visini u odrasloj dobi, itd.). Veza izmedju takvih mjerenja je vrlo rijetko jasna i deterministička, pa je najčešće predstavljamo koristeći vjerojatnosne modele. Veličinu od interesa modeliramo kao slučajnu varijablu koju nazivamo **ovisnom varijablom ili odzivom** (eng. response), a sva ostala mjerenja zovemo **neovisnim varijablama, prediditeljima ili kovarijatama** (eng. predictors).

Podatke koje želimo opisati tipično reprezentiramo kao niz parova

$$(y_i, \boldsymbol{x}_i),\ i = 1, \ldots, n,$$

gdje je y_i realizacija sl. varijable Y_i čija razdioba ovisi o kovarijatama $\boldsymbol{x}_i$. Odmah želimo primjetiti da kovarijate mogu primati numeričke vrijednosti ili kategorijalne vrijednosti. U potonjem slučaju zovemo ih faktorima (npr. spol ili kategorija vozila). Takodjer, kovarijate mogu biti proizvoljno velike dimenzije.

Primjer (jednostavna linearna regresija)

Najpoznatiji ovakav model je svakako jednostavna linearna regresija. Kod nje pretpostavljamo da sl. varijabla Y_i na linearan način ovisi o numeričkoj kovarijati x_i, koja ima oblik

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i\,,$$

gdje je (ε_i) (u pravilu) čine niz n.j.d. normalnih sl. varijabli s očekivanjem 0 i varijancom σ^2. Ekivalentno bismo mogli pisati da je

$$EY_i = \beta_0 + \beta_1 x_i \,.$$

Primjetite da ovaj model ima tri parametra $\beta_0,\ \beta_1$ i σ^2. Prisjetite se i da linearna zavisnost (bilo u teoriji ili na podacima) između dvije varijable ne znači kauzalnost. Kontroverznih primjera je puno (google "spurious correlations").

Primjer (analiza varijance - ANOVA)

Ovdje je x_i jednodimenzionalna kategorijalna varijabla s recimo $m+1$ različitih kategorija npr. $0, 1, 2, \ldots, m$, sl. kao gore

$$Y_i = h(x_i) + \varepsilon_i \,,$$

gdje su ε_i kao i gore, a funkcija h zadovoljava npr.

$$\begin{aligned} h(0) &= \mu \\ h(1) &= \mu + \alpha_1 \\ &\vdots \\ h(m) &= \mu + \alpha_m \end{aligned}$$

Iako funkcija h, pa ni model ne izgledaju linearno to se može riješiti uvođenjem tzv. "dummy" varijabli

$$\begin{aligned} z_{i_1} &= \mathbb{1}\{x_i = 1\} \\ &\vdots \\ z_{i_m} &= \mathbb{1}\{x_i = m\} \,. \end{aligned}$$

Sad je model moguće zapisati i kao

$$Y_i = \mu + \sum_{j=1}^{m} \alpha_i z_{i_j} + \varepsilon_i \,,$$

pa je specijalno zbog normalnosti od ε_i

$$Y_i \sim N(h(x_i), \sigma^2)$$

Kategorijalne varijable dakle nisu nužno problem za linearne modele, no mnoge varijable koje susrećemo u praksi nisu normalno distribuirane. Ponekad se i to može riješiti transformacijom ili promjenom razdiobe od ε_i.

Ostaje problem kako modelirati podatke s kategorijalnim ili npr. cjelobrojnim vrijednostima. Jedan od najvažnijih primjera su sl. varijable koje mogu imati dva stanja, npr. 1 ili 0, recimo ako je osiguranik prijavio štetu u ugovorenom periodu osiguranja ili ne. U ovakvom slučaju bismo mogli prepostaviti da Y_i imaju Bernoullijevu razdiobu, ali tako da vjerojatnost uspjeha odn. $p_i = P(Y_i = 1)$ ovisi o kovarijati x_i, npr. dobi osiguranika. Pri tom dakako moramo voditi računa da p_i mora biti u intervalu $[0, 1]$, što neće biti uvijek zadovoljeno ako prepostavimo da $p_i = EY_i$ na linearan način ovisi o kovarijati x_i.

Primjer a) Za vježbu učitajte podatke u datoteci `PodaciGLM0.csv` koji se tiču uspjeha u procesu zapošljavanja. Prema uobičajenoj proceduri odabir kandidata se, osim na direktnom razgovoru, zasniva i na dva testa kojima pristupaju kandidati. Dostupni su i podaci o vrsti završenog studija koja je za ovu svrhu kategorizirana kao S (stem područje) odn. D (druga područja).

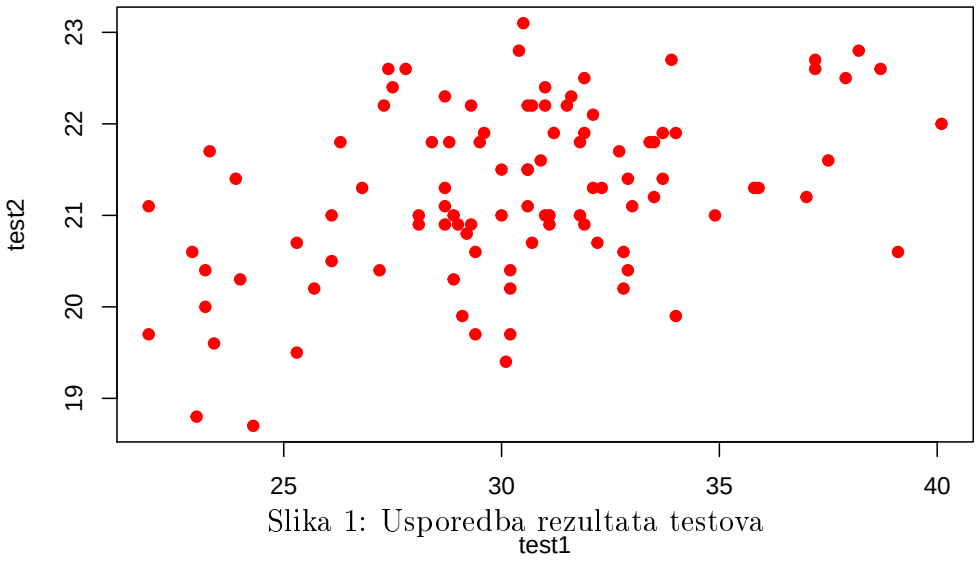
```
zapos<-read.table("PodaciGLM0.csv", header = TRUE, sep =
",")
zapos[1:10,]
attach(zapos) ## omogucava direktno referenciranje
varijabli
plot(test1,test2,pch=19, col=2)
out.lm <- lm(y   test1)
plot(test1, jitter(y,0.1),ylab="y") ## sto radi jitter?
curve(predict(out.lm, data.frame(test1=x)), add = TRUE,
lty = 4)
```

Struktura podataka

```
   y test1 test2 smjer
1  1  28.3  20.9     D
2  0  33.0  22.2     D
3  1  30.0  22.6     D
4  1  28.9  21.3     D
5  1  34.6  20.9     D
6  1  29.8  21.5     D
7  0  25.5  21.8     D
8  1  25.8  22.2     S
```

```
9   0   29.9   20.2      D
10  0   23.6   20.0      S
```

Slika 1 ukazuje na zavisnost između ishoda dvaju testova. A Slika 2 prikazuje (ne baš razumnu) prilagodbu linearnog (regresijskog) modela ovim podacima. Postavlja se pitanje kako modelirati ovisnost ishoda y o preostalim kovarijatama.



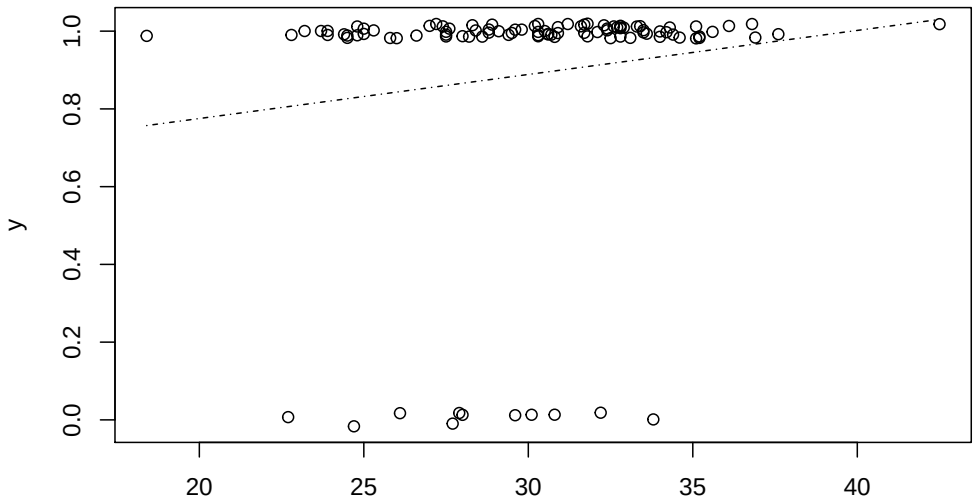
Slika 1: Usporedba rezultata testova

U nekim situacijama je razumno pretpostaviti da težina repa ili varijanca podataka također ovise o kovarijatama ili o tzv. izloženosti (eng. exposure). Uglavnom, potrebna je fleksibilnija ideja od linearne ovisnosti.

1.1 Tri komponente generaliziranih linearnih modela

Osnovna ideja linearnih modela je pretpostavka da postoji linearna veza između očekivanja odziva i kovarijata tj.

$$EY_i = \sum_{j=1}^{d} \beta_i x_{i_j},$$



Slika 2: Usporedba rezultata testa 1 i ishoda u procesu zapošljavanja

gdje je d broj mogućih kovarijata (konstantni član može biti jednostavno uključen). Često čak pretpostavljamo i normalnost

$$Y_i \sim N(\sum_{j=1}^{d} \beta_i x_{i_j}, \sigma^2).$$

Kod generaliziranih linearnih modela prepostavljamo

$$EY_i = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{d} \beta_i x_{i_j}\right),$$

gdje je

- g^{-1} inverz tzv. funkcije veze g
- $\sum_{j=1}^{d} \beta_i x_{i_j}$ tzv. linearni prediktor
- za zadano očekivanje Y_i ima unaprijed određenu razdiobu iz tzv. eksponencijalne familije.

1.2 Općenito o GLM

Teorija GLM omogućuje simultano modeliranje ovisnosti varijable odziva o numeričkim i kategorijalnim varijablama. Iako iz teorijskih razloga, slučajna

komponenta odziva mora imati razdiobu iz neke od eksponencijalnih familija, ova restrikcija je u praksi često prihvatljiva jer ove familije uključuju najčešće korištene razdiobe.

Postoji dobro utemeljena statistička teorija procjene parametara, ali i veliki broj radova i knjiga koje analiziraju primjenu GLMa. Procjena parametara, kao i razni testovi za GLM-e uključeni su u komercijalne statističke pakete kao što su npr. SAS, SPSS, Splus, Statistica, pa tako i u R.

1.3 Eksponencijalne familije

Kažemo da sl. varijabla Y pripada nekoj eksponencijalnoj familiji ako joj gustoća (neprekidna ili diskretna) ima oblik

$$f(y;\theta,\varphi) = \exp\left[\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y,\varphi)\right] \tag{1}$$

za neke funkcije a, b i c. Primjetite da familija ima dva parametra: θ, tzv. **prirodni parametar** i φ tzv. **parametar disperzije** ili **skaliranja**. Pokazat ćemo da očekivanje od Y ovisi isključivo o parametru θ. Kasnije, u generaliziranom linearnom modelu, dopustit ćemo da θ ovisi o linearnoj kombinaciji kovarijata.

▷ Funkcija b u gornjoj definiciji je uvijek dvaput neprekidno diferencijabilna i t.d. je b' invertibilna.

▷ Funkcija a parametra φ se zove **funkcija disperzije** omogućuje dodatnu fleksibilnost u modelu, tako da ne moraju svi odzivi imati istu varijancu npr. Često pretpostavljamo $\varphi > 0$ jer predznak ne mijenja ništa bitno u obliku razdiobe.

▷ Funkciju c tipično ignoriramo jer nema utjecaja u procesu procjene parametara GLMa.

▷ Parametar θ ima vrijednosti u otvorenom skupu.

Jedan česti oblik funkcije disperzije je

$$a(\varphi) = \frac{\varphi}{w},$$

gdje je u praksi $w = w_i$ faktor težine i–tog opažanja, koji se često naziva izloženost. Njegovu ulogu ćemo objasniti kasnije u primjeru s Poissonovom raazdiobom. Izloženost nam omogućuje da na relativno jednostavan način u model uvedemo nejednake varijance.

Promotrimo funkciju log-vjerodostojnosti $l(y;\theta,\varphi) = \log(f(y;\theta,\varphi))$ unutar neke eksponencijalne familije. Ona će nam trebati kasnije pri procjeni GLM. Trenutno trebamo dva vrlo dobro znana rezultata iz statističke teorije:

$$E\left[\frac{\partial l}{\partial \theta}\right] = 0 \qquad \text{i} \qquad E\left[\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}\right] + E\left[\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)^2\right] = 0\,. \tag{2}$$

Da bismo pokazali prvu od gornjih jednakosti, pretpostavimo da možemo diferencirati

$$\int f(y;\theta,\varphi)\mathrm{d}x,$$

po θ jednostavno uvodjenjem znaka diferenciranja pod integral (to je uvijek moguće unutar eksponencijalnih familija). Kako je gornji integral jednak 1 za sve θ, diferenciranjem ćemo dobiti 0.

Dakle

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{\partial}{\partial \theta} f(y;\theta,\varphi)\mathrm{d}x = \int \frac{\partial}{\partial \theta} f(y;\theta,\varphi)\frac{f(y;\theta,\varphi)}{f(y;\theta,\varphi)}\mathrm{d}x & (3)\\ &= \int \frac{\partial}{\partial \theta} l(y;\theta,\varphi) f(y;\theta,\varphi)\mathrm{d}x = E\left[\frac{\partial l}{\partial \theta}\right]. & (4) \end{aligned}$$

Slično ako po θ diferenciramo jednakost

$$\int \frac{\partial}{\partial \theta} l(y;\theta,\varphi) f(y;\theta,\varphi)\mathrm{d}x = 0$$

dobijemo i drugu jednakost u (2).

Za log-vjerodostojnost eksponencijalnih familija vrijedi

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{y - b'(\theta)}{a(\varphi)}.$$

Stoga iz prve od jednakosti u (2) slijedi

$$\mu = E[Y] = b'(\theta) \Longleftrightarrow \theta = b'^{-1}(\mu).$$

Kako vrijedi i

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} = \frac{-b''(\theta)}{a(\varphi)}$$

također iz (2) imamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= a(\varphi)^2 E\left(\frac{Y - b'(\theta)}{a(\varphi)}\right)^2 & (5)\\ &= a(\varphi)^2 E\left[\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)^2\right] = -a(\varphi)^2 E\left[\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}\right] = a(\varphi) b''(\theta). & (6) \end{aligned}$$

Dakle varijanca slučajne varijable Y iznosi

$$\mathrm{Var}(Y) = a(\varphi)b''(\theta)\,,$$

gdje crtica označava derivaciju s obzirom na θ. Dakle, očekivanje ne ovisi o φ, dok varijanca općenito ovisi o oba parametra.

Može se pokazati da je b' neprekidna i invertibilna (čak striktno rastuća funkcija) osim u trivijalnim egzotičnim slučajevima. Stoga stavljajući $\mu = b'(\theta)$ zapravo uvodimo novi parametar, tzv. parametar srednje vrijednosti (mean value parameter), naime sad je $\theta = b'^{-1}(\mu)$, pa je dobro definirana **funkcija varijance** relacijom $\mu \mapsto V(\mu) = b''(\theta) = b''(b'^{-1}(\mu))$.

Uočimo, varijanca podataka ima dvije komponente: jednu koja uključuje parametar skaliranja, i drugu koja odredjuje način na koji varijanca ovisi o očekivanju. Da bi naglasili utjecaj očekivanja na varijancu izrazimo je kao

$$\mathrm{Var}(Y) = a(\varphi)V(\mu).$$

1.4 Primjeri eksponencijalnih familija

Normalna distribucija

$$\begin{aligned} f_Y(y;\theta,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\ &= \exp\left[\frac{y\mu - \mu^2/2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} + \log 2\pi\sigma^2\right)\right] \end{aligned}$$

što je oblika (1) sa

$$\begin{aligned} \theta &= \mu \\ \varphi &= \sigma^2 \\ a(\varphi) &= \varphi \\ b(\theta) &= \theta^2/2 \\ c(y,\varphi) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} + \log 2\pi\sigma^2\right)\,. \end{aligned}$$

Stoga je prirodni parametar normalne distribucije jednak μ, a parametar skaliranja je σ^2.

Prvo, promatramo li normalnu distribuciju, iz (2) možemo izvesti očekivanje i varijancu

$$\begin{aligned} b(\theta) = \theta^2/2 \quad &\text{te stoga} \quad E[Y] = b'(\theta) = \theta = \mu \\ a(\varphi) = \varphi \quad &\text{te stoga} \quad \mathrm{Var}[Y] = a(\varphi)b''(\theta) = \varphi = \sigma^2\,. \end{aligned}$$

Za normalnu distribuciju, varijanca ne ovisi o očekivanju (zbog $b''(\theta) = 1$), ali ćemo kod drugih distribucija vidjeti da to nije uvijek slučaj.

Poissonova distribucija

$$f_Y(y;\theta,\varphi) = \frac{\mu^y e^{-\mu}}{y!} = \exp[y\log\mu - \mu - \log y!]$$

što je oblika (1) sa

$$\begin{aligned} \theta &= \log\mu \\ \varphi &= 1, \text{ te zato } a(\varphi) = 1 \\ b(\theta) &= e^\theta \\ c(y,\varphi) &= -\log y! \end{aligned}$$

Zato je prirodni parametar Poissonove distribucije $\log\mu$, očekivanje je $E[Y] = b'(\theta) = e^\theta = \mu$, a funkcija varijance je $V(\mu) = b''(\theta) = e^\theta = \mu$. Funkcija varijance nam kaže da je varijanca proporcionalna očekivanju. Vidimo da je varijanca u stvari *jednaka* očekivanju, jer je $a(\varphi) = 1$.

Binomna distribucija Binomnu slučajnu varijablu moramo prvo podijeliti s n. Pretpostavimo, dakle, da je $Z \sim$ binomna (n,μ). Stavimo $Y = \frac{Z}{n}$, tako da je $Z = nY$. Diskretna gustoća od Z je $f_Z(z;\theta,\varphi) = \binom{n}{z}\mu^z(1-\mu)^{n-z}$, te supstituirajući za z, distribucija od Y je (za $y = k/n,\ k = 0,\ldots,n$) zadana gustoćom

$$\begin{aligned} f_Y(y;\theta,\varphi) &= \binom{n}{ny}\mu^{ny}(1-\mu)^{n-ny} \\ &= \exp\left[n(y\log\mu + (1-y)\log(1-\mu)) + \log\binom{n}{ny}\right] \\ &= \exp\left[n\left(y\log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right) + \log(1-\mu)\right) + \log\binom{n}{ny}\right] \end{aligned}$$

Dakle opet dobijemo izraz (1) sa

$$\begin{aligned}
\theta &= \log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right) \\
&\quad \text{(uočite da je inverzno preslikavanje } \theta \mapsto \mu = \frac{e^\theta}{1+e^\theta}\ \text{)}, \\
\varphi &= n \\
a(\varphi) &= \frac{1}{\varphi} \\
b(\theta) &= \log(1+e^\theta) \\
c(y,\varphi) &= \log\binom{n}{ny}.
\end{aligned}$$

Zato je prirodni parametar binomne (specijalno i Bernoullijeve) distribucije $\log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)$, očekivanje je

$$E[Y] = b'(\theta) = \frac{e^\theta}{1+e^\theta},$$

a funkcija varijance je

$$V(\mu) = b''(\theta) = \frac{e^\theta}{(1+e^\theta)^2} = \mu(1-\mu).$$

Gama distribucija Kod gama distribucije korisno je zamijeniti parametre iz α i λ u α i $\mu = \frac{\alpha}{\lambda}$, t.j., $\lambda = \frac{\alpha}{\mu}$.

$$\begin{aligned}
f_Y(y;\theta,\varphi) =& \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} = \frac{\alpha^\alpha}{\mu^\alpha \Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{\frac{y\alpha}{\mu}} \\
=& \exp\left[\left(-\frac{y}{\mu} - \log\mu\right)\alpha + (\alpha-1)\log y + \alpha\log\alpha - \log\Gamma(\alpha)\right]
\end{aligned}$$

Ponovo je gustoća oblika (1) sa

$$\begin{aligned}
\theta &= -\frac{1}{\mu} \\
\varphi &= \alpha \\
a(\varphi) &= \frac{1}{\varphi} \\
b(\theta) &= -\log(-\theta) \\
c(y,\varphi) &= (\varphi-1)\log y + \varphi\log\varphi - \log\Gamma(\varphi).
\end{aligned}$$

Stoga je, ignorirajući negativan predznak (zapravo prebacujući ga na funkciju odziva), prirodni parametar gama distribucije jednak $1/\mu$. Očekivanje je $E[Y] = b'(\theta) = -1/\theta = \mu$. Funkcija varijance je $V(\mu) = b''(\theta) = 1/\theta^2 = \mu^2$, te je varijanca jednaka μ^2/α.

1.5 Generalizirani linearni model

Generalizirani linearni model pretpostavlja da varijable odziva Y opažamo na nezavisan način za različite vrijednosti kovarijate x. Model pri tom uključuje sljedeće komponente:

- Kovarijate x koje mogu biti višedimenzionalne, a na razdiobu odziva Y utječu preko tzv. linearnog predviditelja $\eta = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_r x_r$, gdje je $x = (x_1, \ldots, x_r)$.
- Razdioba sl. varijable Y za dane kovarijate pripada uvijek istoj eksponencijalnoj familiji razdioba.
- Očekivanje od Y je glatka i invertibilna funkcija linearnog previditelja η oblika $b' \circ h$ za neku funkciju h, tj.

  $$\theta = h(\eta) \quad \text{i} \quad \mu = EY = b'(\theta) = b'(h(\eta))$$

  pa je

  $$\mu = g^{-1}(\eta) \text{ odn } \eta = g(\mu)\,,$$

  za funkciju $g = h^{-1} \circ b'^{-1}$ koju zovemo **funkcija veze**.

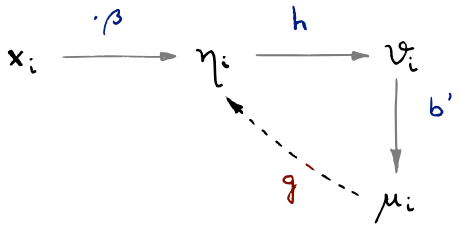
I prirodni parametar θ je u ovom slučaju glatka funkcija od η

$$\theta = b'^{-1}(\mu) = h(\eta)\,.$$

Ako $h \equiv id$, tada je $\theta \equiv \eta$, a

$$g = b'^{-1}$$

se naziva kanonska funkcija veze. Općenito utjecaj kovarijata na očekivanje odziva prikazuje dijagram



Funkcija veze g je zadana nizom preslikavanja $(\boldsymbol{x}_i) \longmapsto \eta_i = \beta_1 x_{i,1} + \cdots + \beta_r x_{i,r} \overset{h}{\longmapsto} \theta_i \overset{b'}{\longmapsto} \mu_i$

Primjer (linearna regresija s normalnim šumom)

Kako smo već naveli ovaj model specificira da odziv Y ima razdiobu kao $\mu + \varepsilon$, gdje je $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, a broj μ predstavlja očekivanje od Y i ovisi o kovarijatama $x = (x_1, \ldots, x_p)$ na sljedeći način

$$\mu = \eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_p x_p \,.$$

Primjetite da je ovo specijalni slučaj GLM, kod kojeg je eksponencijalna familija familija normalnih razdioba, a funkcija veze je jednostavno identiteta $g(\mu) = \mu$. Uočite uvijek možemo dopustiti konstantni član tako da dodamo jednu kovarijatu (npr. x_p) koja za sve podatke u uzorku iznosi 1.

Primjer (logistička regresija)

Ako želimo modelirati binarni odziv kao Bernoullijevu sl. varijablu, moramo odrediti vjerojatnosti $\mu = P(Y = 1) = EY$ kao funkciju od kovarijata. Naravno, ta funkcija mora primati vrijednosti u intervalu $[0, 1]$. Jedan često korišten model specificira ovisnost oblika

$$\log \frac{\mu}{1-\mu} = \eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_r x_r \,, \text{ tj. } \mu = \frac{e^\eta}{1+e^\eta} \,.$$

Funkcija veze je tzv. **logit funkcija** $g(\mu) = \log \mu/(1-\mu)$, dakle upravo kanonska funkcija veze za binomnu razdiobu.

Primjer (probit regresija)

Mogli smo pretpostaviti i da vrijedi

$$\mu = \Phi(\eta) = \Phi(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_r x_r)$$

sada je funkcija veze tzv. **probit funkcija** $g(\mu) = \Phi^{-1}(\mu)$.

Primjer (Poissonova razdioba)

Preptostavimo cjelobrojni odziv modeliramo kao Poissonovu sl. varijablu s parametrom $\mu = EY$ koji ovisi o kovarijatama. Ako koristimo kanonsku fukciju veze vrijedi $g(\mu) = \log \mu$ vrijedi

$$\mu = e^{\eta} = \exp\left(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_r x_r\right) .$$

Ako Y_i predstavlja npr. broj štetnih događaja osiguranika i, on osim o kovarijatama $\boldsymbol{x}_i$ može (i treba) ovisiti o izloženosti danog osiguranika (npr. dosadašnjem ukupnom trajanju osiguranja) w_i. Ako uvedemo $\widetilde{Y}_i = Y_i/w_i$ (tj. broj štetnih događaja po jedinici vremena) očekivanje ove slučajne varijable prikazujemo u obliku

$$\mu_i = E\widetilde{Y}_i = g^{-1}\left(\beta_0 + \beta_1 x_{i,1} + \cdots + \beta_r x_{i,r}\right) .$$

Dok pretpostavljamo da je sama Y_i Poissonova s očekivanjem $EY_i = w_i\mu_i$, i varijancom $\operatorname{Var} Y_i = w_i^2 \operatorname{Var} \widetilde{Y}_i = EY_i/(1/w_i)$. Ako je npr. $g^{-1} = \exp$, tada je

$$EY_i = w_i\mu_i = e^{\beta_0+\beta_1 x_{i,1}+\cdots+\beta_r x_{i,r}+\log w_i} .$$

U R-u koristimo opciju `offset=log(trajanje)` da bismo naglasili da trajanje osiguranja želimo koristiti kao izloženost w_i.

Primjer (gama razdioba)

Razmislite koje vrijednosti linearnog prediktora daju nedopuštene vrijednosti prirodnog parametra ako se koristi kanonska funkcija veze (prema Ohlssen & Johansson (2010) ovo je razlog izbjegavanja kanonske funkcije veze u praksi, premda se i to može dopustiti ako pazimo kod procjene parametara β_i.)

Za linearnu i logističku regresiju je $\theta = g(\mu) = \eta$, odn. $g = b'^{-1}$, a linearni predviditelj jednak je prirodnom parametru modela. Takve funkcije veze zovemo takodjer **prirodnim ili kanonskim.** Sljedeća tablica sadrži neke važnije familije i pripadne kanonske funkcije veze.

Razdioba	Kanonska veza	Naziv
Binomna	$\log(\mu/(1-\mu))$	logit funkcija
Poissonova	$\log \mu$	logaritam
Normalna	μ	identiteta
Gama	μ^{-1}	inverz

Nije nužno uvijek koristiti kanonske funkcije veze. One su izabrane zbog jednostavnosti. Općenito moramo samo voditi računa da vrijednost parametra

$\theta = g^{-1}(\eta)$ mora pripadati u skup prihvatljivih parametara.

Napomenimo još jednom da kategorijalne varijable ili faktore u linearni predviditelj možemo uvesti preko tzv. "dummy variables".

1.6 Linearni predviditelji i interpretacija parametara

Kako smo istaknuli kovarijate x_i utiču na razdiobu od Y preko linearnog predviditelja. Ako imamo jednu numeričku kovarijatu (ili kontrolnu varijablu, npr. dob) x linearni predviditelj zapisujemo u obliku

$$\beta_0 + \beta_1 x.$$

Ako uz nju imamo još jedan faktor (ili kategorijalnu kovarijatu, npr. spol) s dvije kategorije onda će linearni predviditelj imati oblik

$$\alpha_i + \beta x, \ i = 1, 2$$

gdje konstantu α_1 koristimo za prvu, a α_2 za drugu od dvije kategorije.

Ponekad će i utjecaj ostalih kovarijata ovisiti o faktoru, npr. dob može imati različiti utjecaj na varijablu Y za osobe ženskog u odn. na osobe muškog spol. Tada kažemo da su te dvije kovarijate u **interakciji**. Linearni predviditelj bismo mogli zapisali u obliku

$$\alpha_i + \beta_i x, \ i = 1, 2$$

gdje se konstante α_i, β_i razlikuju za dvije kategorije.

Ako imamo dvije kovarijate, obje kategorijalne, dva faktora dakle, i tada je moguće za izmedju njih postoji interakcija, pa bi u tom slučaju linearni predviditelj pisali u obliku

$$\alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}, \ i, j = 1, 2, \ldots$$

U jednostavnoj linearnoj regresiji je vrijedilo

$$EY_i = \beta_0 + \beta_1 x_i \,,$$

pa je parametar β_1 lako interpretirati. Općenito to nije slučaj u GLM modelima.

Primjer (logistička regresija)

Prisjetimo se odziv Y ima Bernoullijevu razdiobu s parametrom $\mu = P(Y = 1) = EY$, a zbog jednostavnosti pretpostavimo da imamo samo jednu binarnu numeričku kovarijatu $x = 0, 1$, tj. neka je $\eta = \beta_0 + \beta_1 x$. Jasno

$$\mu = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0+\beta_1 x}}.$$

Sad je

$$\mu(x = 1) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1}}{1 + e^{\beta_0+\beta_1}} \quad \text{odn.} \quad \mu(x = 0) = \frac{e^{\beta_0}}{1 + e^{\beta_0}}.$$

Za Bernoullijeve sl. varijable nekad računamo tzv. izglede (engl. odds)

$$\text{odds}(Y) = \frac{\mu}{1 - \mu}.$$

Omjer izgleda za Y, Y' Bernoullijeve s vjerojatnostima uspjeha μ, μ' je

$$\text{odds ratio}(Y, Y') = \frac{\frac{\mu}{1-\mu}}{\frac{\mu'}{1-\mu'}}.$$

Uočite, omjer izgleda nije relativni rizik

$$\text{relative risk}(Y, Y') = \frac{\mu}{\mu'}.$$

Posebno ako je $Y_1 \sim \text{Ber}(\mu(x = 1))$ i $Y_0 \sim \text{Ber}(\mu(x = 0))$

$$\text{odds ratio}(Y_1, Y_0) = e^{\beta_1},$$

tj. izgledi odziva Y su za ovaj faktor veći (manji) ako je $x = 1$.

Primjer (Poissonova razdioba)

Pretpostavimo cjelobrojni odziv modeliramo kao Poissonovu sl. varijablu s parametrom $\mu = EY$ koji ovisi o numeričkim kovarijatama. Ako koristimo kanonsku fukciju veze lako je intepretirati parametre u relaciji

$$\mu = \exp\left(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_r x_r\right).$$

2 Procjena i odabir modela

2.1 Procjena parametara

Procjena parametara u GLM može biti poprilično složena. Standardna procedura za njihovu procjenu je MLE procedura tj. korištenje maksimuma funkcije vjerodostojnosti. U praksi osim za jednostavne modele pronaći maksimume nije jednostavno i koriste se numerički algoritmi (Newton-Raphson ili iterative weighted least squares). Za izradu intervala pouzdanosti i testove potrebni su nam i elementi Fisherove informacijske matrice. Parametar φ se obično može neovisno procijeniti. U osnovnom primjeru linearne regresije procjena je relativno jednostavan zadatak.

Primjer (linearna regresija) Uz pretpostavku da podaci $\boldsymbol{y} = (y_i)$ slijede model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \,,$$

njihova je funkcija log-vjerodostojnosti oblika

$$l(\boldsymbol{y}; \beta_0, \beta_1, \sigma^2) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\log \sigma^2}{2} - \frac{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{2\sigma^2}.$$

Da bismo pronašli procjenitelje za β_0 i β_1 možemo derivirati gornju funkciju po ovim parametrima. Iz oblika funkcije l, jasno je da MLE procjenitelji $\hat{\beta}_0$ i $\hat{\beta}_1$ neće ovisiti o σ^2.

Procjenitelj dobijemo minimizirajući izraz

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

Dakle naši procjenitelji su jednostavno rezultat metode najmanjih kvadrata. A sumu

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2.$$

zovemo **residual sum of squares** (RSS). On je mjera kvalitete podudaranja podataka s modelom i našim procjeniteljima.

Jasno je da bi model s proizvoljno mnogo parametara odn. kovarijata (od kojih je jedna npr. redni broj opažanja) mogao u teoriji postići savršenu predikciju očekivanih opaženih odziva tj. riješiti sustav

$$y_i = g^{-1}(\eta_i) = g^{-1}(\beta_1 x_{i,1} + \cdots + \beta_r x_{i,r}) \,.$$

Model u kojem je to moguće naziva se **zasićeni** i tipično nije jako koristan (razmislite zašto). Ipak usporedimo li naš procjenjeni model sa zasićenim mogli bismo saznati koliko je on zaista dobar.

Kako model s većim brojem parametara uključuje model s manjim brojem parametara kao svoj (restringirani) podmodel, ako njihove maksimizirane log–vjerodostojnosti označimo s $\hat{l}$ odn. sa $\hat{l}_0$ vrijedi

$$\hat{l} \geq \hat{l}_0 \,,$$

a obje vrijednosti su manje od $\hat{l}_F$ odn. log–vjerodostojnosti zasićenog modela.

2.2 Devijanca i odabir modela

Općenito ako sa $\hat{l}$ označimo maksimiziranu log-vjerodostojnost koju smo postigli s našim procjeniteljima, a sa $\hat{l}_F$ maksimiziranu log-vjerodostojnost u zasićenom modelu, (skaliranu) **devijancu** našeg modela definiramo kao

$$d_M = 2(\hat{l}_F - \hat{l}).$$

Neskalirana devijanca za odabrani model, D_M, definira se kao

$$D_M = d_M \varphi \,.$$

U slučaju linearne regresije iz našeg primjera, devijanca D_M je točno jednaka RSS (provjerite). Neskalirana devijanca ne ovisi o parametru φ.

Devijanca je općenito oblika

$$D_M = \sum w_i d(y_i, \mu_i) \,,$$

a funkcija d ovisi o korištenoj eksponencijalnoj familiji razdioba. Pokušajte je odrediti za za normalne, Poissonove i gama razdiobe.

Nakon što smo odabrali model i procjenili njegove parametre važno je znati koje od kovarijata su zaista bitne u modeliranju odziva, a koje možemo ispustiti. Da bismo to napravili pretpostavimo da imamo p kontroliranih varijabli, tako da je linearni procjenitelj oblika

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_p x_p \,,$$

Prepostavimo da smo maksimiziranjem funkcije log-vjerodostojnosti pronašli procjenitelje $\hat{\beta}_i$ i dosegnuli maksimum $\hat{l}$.

Prepostavite da želimo testirati nul hipotezu $H_0 : \beta_{q+1} = \cdots = \beta_p = 0$.

Procedura testa ima tri koraka

- Koristeći MLE procjenimo parametre u punom i restringiranom modelu
- Nadjemo maksimalnu log-vjerodostojnost u punom i restringiranom modelu, odn $\hat{l}$ i $\hat{l}_0$
- Izračunamo **log–likelihood ratio statistics ili statistiku omjera vjerodostojnosti**

  $$2(\hat{l} - \hat{l}_0).$$

  Ako je ona iznad kritične vrijednosti za izabrani nivo značajnosti i razdiobu χ^2 sa $p - q$ stupnjeva slobode odbacujemo nul hipotezu.

Uočite da je testna statistika razlika devijanci, tj.

$$2(\hat{l} - \hat{l}_0) = d_{M_0} - d_M$$

Test u posljednjem koraku je egzaktan samo za normalnu razdiobu, inače je korektan samo asimptotski. Lako se vidi da je test moguće bazirati i na razlici skaliranih devijanci, te da se dobije potpuno isti izraz. Pri tom smo ignorirali činjenicu da je za odredjivanje skaliranih devijanci (kao i $\hat{l}$ i $\hat{l}_0$) potrebno znati φ (ili σ^2 u slučaju linearne regresije npr.) Ako je φ nužno prvo procijeniti test se ponekad obavlja u odn. na F razdiobu. U praksi se testovi često provode uz nivo značajnosti od 5%.

Alternativno možemo promatrati z-statistike $\hat{\beta}_k/\text{s.e.}(\hat{\beta}_k)$, koje bi uz nul-hipotezu $\beta_k = 0$ trebale imati (aproksimativno) standardnu normalnu razdiobu, pa bismo nul-hipotezu odbacivali kad je taj izraz po aps. vrijednosti veći od $1.96 \approx 2$. Ipak, ove tzv. Waldove statistike treba oprezno intepretirati. Naime, kovarijate mogu medjuovisne, pa tako i testovi, a imamo i jasan problem višetrukog testiranja hipoteza. Nadalje, u nekim modelima npr. logističkoj regresiji, Waldove z-statistike daju test vrlo male snagu (v. Agresti (2015)). U R-u postoji mogućnost usporedbe dva modela od kojih su u jednom neki koeficijenti 0, tj. $H_0 : \beta_{q+1} = \cdots = \beta_p = 0$ naredbom `wald.test`. Ipak ukoliko nema posebnih razloga za drugačiji odabir, preferirat ćemo prije uvedeni log–likelihood ratio test.

Dakle, pri odlučivanju koji model(i) adekvatno objašnjavaju podatke, treba ispitivati razlike u devijancama i stupnjevima slobode. Redoslijed kojim

se članovi dodaju modelu utječe na rezultate pa se u praksi može gledati nekoliko redoslijeda tražeći što jednostavniji model. Na primjer, svaki glavni faktor može se prilagoditi sam za sebe, umjesto da se svaki dodaje modelu sukcesivno što je napravljeno gore. U konačnom odabiru možemo se oslanjati i na tzv. Akaikeov informacijski kriterij (v. Agresti (2015)).

Primjer Binarni odziv - podaci o štetama u osiguranju. Poredak je važan uočite.

```
ydf=read.table("PodaciGLM2013.csv", header = TRUE, sep = ",")
attach(ydf)
names(ydf)
```

```
## [1] "Steta"        "spolovi"      "regija"       "tip"
## [5] "voz.iskustvo" "cijena.voz"   "dob"
```

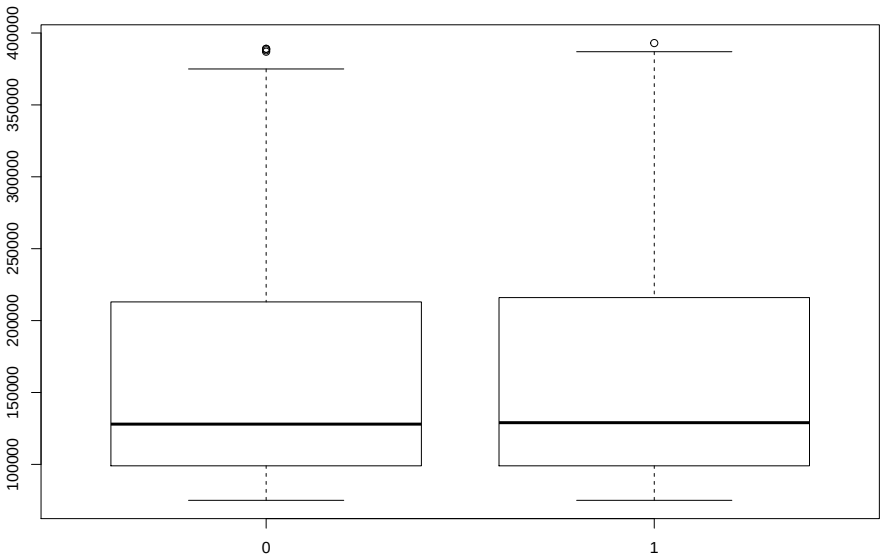
```
ydf[1:10,]
```

```
##    Steta spolovi regija tip voz.iskustvo cijena.voz dob
## 1      1       M      2   1           18     103000  37
## 2      1       Z      2   2           42      85000  60
## 3      1       Z      2   2           25      86000  43
## 4      1       M      2   2           47      88000  66
## 5      0       Z      2   2           47      99000  65
## 6      1       M      3   3           20     106000  38
## 7      1       M      1   3            6     323000  27
## 8      1       M      1   3           11     106000  29
## 9      0       Z      1   3           16     113000  35
## 10     0       Z      2   5           27     114000  49
```

```r
t(table(Steta,regija))/colSums(table(Steta,regija))
```

```
##       Steta
## regija         0         1
##      1 0.2963863 0.7036137
##      2 0.3480019 0.6519981
##      3 0.3172193 0.6827807
```

```r
boxplot(cijena.voz~Steta)
```



```r
outA.logit <- glm(Steta ~ cijena.voz+ dob+
as.factor(spolovi)+as.factor(regija), family = binomial)
anova(outA.logit)
```

```
## Analysis of Deviance Table
##
## Model: binomial, link: logit
##
## Response: Steta
##
## Terms added sequentially (first to last)
##
##
##                     Df Deviance Resid. Df Resid. Dev
## NULL                                 9999    12586.6
## cijena.voz           1     1.69      9998    12584.9
## dob                  1  3117.29      9997     9467.7
## as.factor(spolovi)   1    54.17      9996     9413.5
## as.factor(regija)    2    42.97      9994     9370.5
```

Primjer Podaci o broju policijskih zaustavljanja po okruzima i rasi. Uočite *offset*.

```
##    eth precinct stops past.arrests
## 1    1        1   202          980
## 2    2        1   102          295
## 3    3        1    81          381
## 4    1        2   132          753
## 5    2        2   144          557
## 6    3        2    71          431
## 7    1        3   752         2188
## 8    2        3   441          627
## 9    3        3   410         1238
## 10   1        4   385          471
```

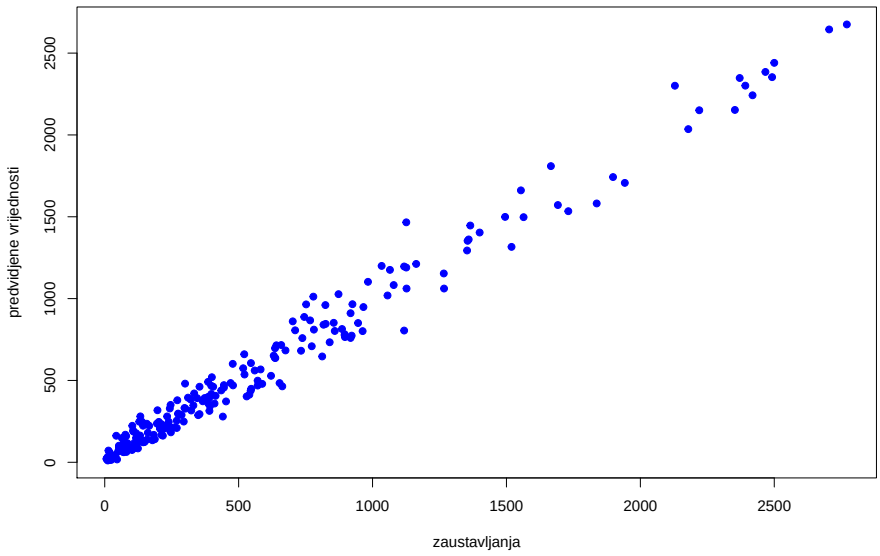
```
fit.2 <- glm (stops ~ factor(eth), data=stops,
family=poisson, offset=log(past.arrests))
summary(fit.2)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = stops ~ factor(eth), family = poisson, data = stops,
##     offset = log(past.arrests))
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -47.327   -7.740   -0.182   10.241   39.140
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)  -0.588086   0.003784 -155.40   <2e-16 ***
## factor(eth)2  0.070208   0.006061   11.58   <2e-16 ***
## factor(eth)3 -0.161581   0.008558  -18.88   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 46120  on 224  degrees of freedom
```

```
fit.2 <- glm (stops ~ factor(eth), data=stops,
family=poisson, offset=log(past.arrests))
summary(fit.2)
fit.3 <- glm (stops ~ factor(eth) + factor(precinct),
data=stops, family=poisson, offset=log(past.arrests))
summary(fit.3)
```

```
anova(fit.3)
```

```
## Analysis of Deviance Table
##
## Model: poisson, link: log
##
## Response: stops
##
## Terms added sequentially (first to last)
##
##
##                  Df Deviance Resid. Df Resid. Dev
## NULL                                224      46120
## factor(eth)       2      683       222      45437
## factor(precinct) 74    42010       148       3427
```



Ako je razlika u devijancama veća od kritične vrijednosti, tada je dodani član značajan u objašnjenju varijacije u odzivu. Stoga vidimo da se svaki od glavnih faktora čini značajnim i treba biti upotrebljen u modelu. Medjutim, niti jedna interakcija ne čini se naročito značajnom.

Oprez: redoslijed kojim smo uvodili nove komponente u model je bitan. Moguće je ponekad da drugi redoslijed da i drugačije rezultate, tj. drugačiji konačni model. Postoje i automatizirane procedure zasnovane na tzv. AIC i sličnim kriterijima za odabir modela, no uloga statističara ostaje presudna. U praksi nastojimo izbjeći "overfitting".

2.3 Analiza ostataka i ocjena prilagodbe modela

Nakon što je upotrebom svih devijanci nađen mogući model, treba ga provjeriti gledajući ostatke i značajnost parametara. Ostaci se zasnivaju na razlikama izmedju opaženih i predvidjenih odziva

$$y_i - \hat{\mu}_i.$$

U primjeru regresije ostaci su bili $y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$. Ako imamo dva faktora na primjer, i upotrijebimo log funkciju veze, predvidjeni odzivi mogu se dobiti iz

$$\hat{\mu} = e^{\alpha_j + \beta_j} .$$

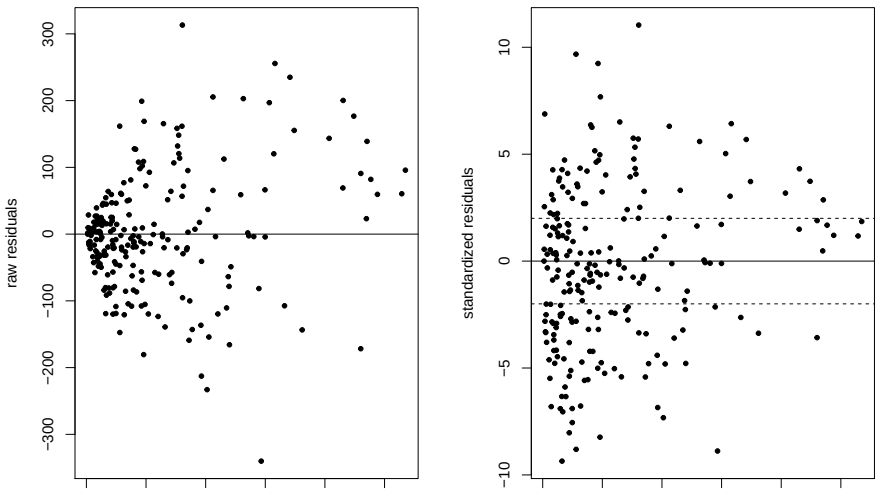
Da bismo analizirali raspršenost ostatataka moramo ih prethodno standardizirati. U softverskim paketima najčešće se koriste dva oblika standardizacije: **Pearsonovi ostaci** su oblika

$$\frac{y - \hat{\mu}}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\mu})}}$$

Ostaci u devijanci su definirani kao produkt predznaka od $y - \hat{\mu}$ i drugog korijena doprinosa svakog od y devijanci. I oni kao i Pearsonovi ostaci (kad je model točan) imaju asimptotski približno standardnu normalnu razdiobu.

U praksi bismo analizirali ostatke koristeći histogram ili qq-plot da vidimo jesu li naše prepostavke o razdiobi opravdane. Takodjer bismo tražili skrivenu strukturu u ostacima, plotajući ih nasuprot pojedinih kovarijata. Ako grafovi sugeriraju još neki oblik zavisnosti preostaje nam ponovo pogledati i evt. proširiti naš model.

```
par(mfrow=c(1,2))
pv <- fitted(fit.3)
r <- (stops$stops - fitted(fit.3))
plot(pv, r, pch=20, ylab="raw residuals", xlab="predicted value")
abline(h=0)
sr <- (stops$stops - fitted(fit.3))/sqrt(fitted(fit.3))
plot(pv, sr, pch=20, ylab="standardized residuals", xlab="predicted val
abline(h=c(-2,0,2),lty=c(2,1,2))
```



Zadatak 1 *U datoteci* `hipertenzija.txt`*, (Altman, 1991., str.353.) nalaze se podaci o pacijentima koji boluju od hipertenzije. Zabilježeni su podaci o pušenju, pretilosti i hrkanju pacijenata.*

```
> data=read.table("hipertenzija.txt", header=TRUE)
> data
pus pret hrk ukupno hiper
1 ne ne ne 60 5
2 da ne ne 17 2
3 ne da ne 8 1
4 da da ne 2 0
5 ne ne da 187 35
6 da ne da 85 13
7 ne da da 51 15
8 da da da 23 8
```

Na primjer, od 60 pacijenata koji nisu pušači, nisu pretili i ne hrču, 5 njih boluje od hipertenzije. Pretpostavljamo da su odzivi (tj. broj oboljelih od hipertenzije) $Y_i \sim B(n_i, \mu_i)$*,* $i = 1, \ldots, 8$ *pri čemu je* $n_1 = 60, n_2 = 17$ *itd., a vjerojatnost "pozitivnog odziva" (tj. prisutnosti hipertenzije)* $\mu_i = g^{-1}(\eta_i)$ *je funkcija linearnog prediktora* η_i *(zapravo modeliramo* Y_i/n_i*, vidi predavanja). U* `R`*-u moramo kao odziv uz* y_i *(realizacija od* Y_i*) zadati i* $n_i - y_i$ *(broj neuspjeha), tj. zadajemo par* $(y_i, n_i - y_i)$*. Promatramo GLM za ove podatke koristeći logit funkciju veze.*

(i) Analizom devijanci odredite "optimalni" model za podatke (ignorirajte interakcije) ako kovarijate dodajemo redoslijedom kao u tekstu zadatka. Koje kovarijate sadrži?

(ii) Prikažite vjerojatnosti hipertenzije u procijenjenom (optimalnom) modelu za sve kombinacije vrijednosti kovarijata koristeći (a) funkciju `predict` *(b) direktno, koristeći procijenjene koeficijente u modelu. Za koje vrijednosti kovarijata je procijenjena vjerojatnost najveća? Usporedite i s relativnim frekvencijama iz podataka.*

Zadatak 2 *U datoteci* `binary.csv` *nalaze se podaci o uspješnosti upisa 400 studenata na poslijediplomske studije. Za svakog su aplikanta dani rezultati GRE testa, prosjek ocjena (GPA) i rang fakulteta na koji se aplicirao.*

(i) Izračunajte relativne frekvencije upisa u odnosu na rang odabranog fakulteta te grafički prikažite ovisnost upisa s obzirom na GPA, odnosno

GRE test (koristite `jitter`*). Ima li indikacija da neke od ovih kovarijata utječu na vjerojatnost upisa?*

(ii) Prilagodite probit model za dane podatke koristeći kovarijatu GPA. Na temelju smanjenja devijance u odnosu na nul-model zaključite je li ova kovarijata statistički značajna u modeliranju vjerojatnosti upisa. Prikažite grafički vjerojatnost upisa u ovisnosti o GPA u ovom modelu te na istom grafu prikažite i odgovarajuće stvarne podatke.

(iii) Procijenite parametre probit modela za dane podatke koristeći sve kovarijate (bez interakcija), a kovarijate dodajite redoslijedom kao u tekstu zadatka. Analizirajući devijance zaključite jesu li sve kovarijate u tom slučaju statistički značajne u modeliranju odziva. Izračunajte vjerojatnosti upisa u ovom modelu za studenta s GRE rezultatom 750 i prosjekom 3.88 koji želi upisati poslijediplomski program na sveučilištu ranga 1,2,3, odnosno 4.