Linearna algebra 1, 2022./2023.

4. domaća zadaća

1. U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 7 & \lambda \end{bmatrix}.$$

   Nadalje, u ovisnosti o parametru λ odredite i rang matrice AS, gdje $S \in \mathrm{M}_4$ proizvoljna regularna matrica.

2. Neka je A matrica reda 3, te neka je B matrica nastala iz matrice A tako što smo izveli redom sljedeće elementarne transformacije:

   (a) zamijenili prvi i drugi redak,

   (b) dodali drugom retku prvi redak pomožen s 5,

   (c) dodali trećem stupcu prvi stupac pomožen s 4,

   (d) drugi redak pomnožili s 8.

   Zapišite matricu B kao produkt matrice A i odgovarajućih elementarnih matrica, te matricu A kao produkt matrice B i odgovarajućih elementarnih matrica.

3. Neka su $A \in \mathrm{M}_{mn}$ i $B \in \mathrm{M}_{np}$, te neka je $C \in \mathrm{M}_{m,n+p}$ blok-matrica definirana kao $C = [\,A \,|\, AB\,]$. Dokažite da matrice A i C imaju jednak rang.

4. U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sljedeći sustav linearnih jednadžbi

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & & & = & 1 \\ \lambda x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & \lambda \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & & & = & \lambda \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

5. Neka je $A \in \mathrm{M}_{mn}$ matrica ranga m. Neka su $E_1, \ldots, E_m$ stupci jedinične matrice $I \in \mathrm{M}_m$.

   (a) Dokažite da sustav $AX = E_i$ ima rješenje za svaki $i = 1, \ldots, m$.

   (b) Koristeći tvrdnju (a) dokažite da postoji matrica $B \in \mathrm{M}_{nm}$ takva da je $AB = I$.